ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

1. Έστω μία ακολουθία μήκους n από Κ και Γ που δίνει ένα πιθανό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε την τελευταία θέση στην ακολουθία και ας τη σημειώσουμε σαν 'ξεχωριστή θέση'. Τότε αν a_n είναι ο αριθμός των ακολουθιών μήκους n, στις οποίες δεν έχουμε δύο διαδοχικά Κ, θα έχουμε την εξής σχέση: Εάν στη θέση n, που ξεχωρίσαμε, έχουμε Γ, τότε θεωρούμε τις θέσεις από 1 εώς $n-1$ σαν μία νέα ακολουθία μήκους $n-1$, στην οποία πάλι δεν πρέπει να έχουμε δύο Κ γειτονικά, ενώ αν στη θέση n έχουμε Κ, τότε επειδή στη θέση $n-1$ πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε Γ, παίρνουμε σαν νέα ακολουθία τις θέσεις από 1 έως $n-2$. Σ' αυτές η ακολουθία μήκους $n-2$ δεν πρέπει να έχει δύο διαδοχικά Κ. Έτσι έχουμε την ομογενή αναδρομική σχέση $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με αρχικές συνθήκες $a_1 = 2$ και $a_2 = 3$.

   Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

   Έτσι,

$$a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \overset{n=1,2}{\overbrace{\Longrightarrow}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

   Άρα,

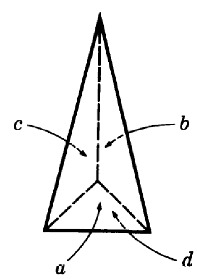
$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,\ \forall n \in N^*.$$

2. (α′) Υπάρχουν $\binom{5}{3}$ τρόποι για να επιλέξουμε 3 άνδρες από τους 5 άνδρες και $\binom{7}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 γυναίκες από τις 7 γυναίκες.
Άρα υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{3}\binom{7}{2} = 210$ τρόποι για να επιλέξουμε 3 άνδρες και 2 γυναίκες.

(β′) (πλήθος ομάδων με τουλάχιστον έναν άνδρα) = (συνολικός αρθμός πενταμελών ομάδων) - (πλήθος πενταμελών ομάδων που ΔΕΝ περιέχουν κανέναν άνδρα) $= \binom{12}{5} - \binom{7}{5} = 771$

3. Η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

- $D = \{a, b, c, d\}$, οι πλευρές
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^4
- Για την π_2 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Για την π_3 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^1 x_3^1 + x_1^1 x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^1 x_3^1}{3}$



- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:
- Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} = x^4 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1+1+2+2+2 = 8$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

Εναλλακτικά: Η βάση της πυραμίδας μπορεί να χρωματιστεί με δύο τρόπους (αφού 2 είναι τα διαθέσιμα χρώματα). Για κάθε έναν από αυτούς τους χρωματισμούς, οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να λάβουν οι υπόλοιπες πλευρές προκύπτουν ως εξής:

- $D = \{a, b, c\}$, οι πλευρές (εκτός της βάσης)
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^3
- Για την π_2 είναι: x_3^1
- Για την π_3 είναι: x_3^1
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_3^1 + x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^3 + 2x_3^1}{3}$
- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:

· Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^3 + 2(x^3+y^3)}{3}$

· Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $\frac{2^3+2\cdot 2}{3} = 4$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί για κάθε διαφορετικό χρωματισμό της βάσης. Επομένως, συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 4 = 8$ διαφορετικοί χρωματισμοί.

4. Έχουμε:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \tag{1}$$

Επίσης $(1+x)^n(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j =$

Από ιδιότητες σειρών έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \sum_{r=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{n}{r-k} \right) x^r \tag{2}$$

Άρα από ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών και εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n από την (1) και (2) έχουμε:

$$\tbinom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$