# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
# ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
# ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2015

1. Υπάρχουν $\binom{5}{3}$ τρόποι για να επιλέξουμε 3 άνδρες από τους 5 άνδρες και $\binom{7}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 γυναίκες από τις 7 γυναίκες.

   Άρα υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{3}\binom{7}{2} = 210$ τρόποι για να επιλέξουμε 3 άνδρες και 2 γυναίκες.

   (πλήθος ομάδων με τουλάχιστον έναν άνδρα) = (συνολικός αρθμός πενταμελών ομάδων) - (πλήθος πενταμελών ομάδων που ΔΕΝ περιέχουν κανέναν άνδρα) = $\binom{12}{5} - \binom{7}{5} = 771$

2. Η γεννήτρια συνάρτηση για το 1ο κουτί είναι: $1 + x + x^2 + ... + x^{10}$
   Η γεννήτρια σύνάρτηση για καθένα από τα υπόλοιπα 6 κουτιά είναι: $1 + x + x^2 + ...$
   Οπότε, η τελική γεννήτρια σύνάρτηση για τα 7 κουτιά είναι: $(1+x+x^2+...+x^{10})(1+x+x^2+...)^6 = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^6 = (1-x)^{-7}(1-x^{11}) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k\right](1-x^{11}) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k\right](1-x^{11})$
   Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $x^{25}$ στο ανάπτυγμα του $\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k\right](1-x^{11})$
   Αυτός μπορεί να προκύψει είτε για $k = 25$ είτε για $k = 14$ και είναι: $\binom{6+25}{25} - \binom{6+14}{14} = \binom{31}{25} - \binom{20}{14} = 697521$

3. Ας είναι:

$$\begin{gathered}
a_n \text{ - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε } 0. \\
b_n \text{ - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε } 1. \\
c_n \text{ - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε } 2. \\
x_n = a_n + b_n + c_n
\end{gathered}$$

Αλλάζοντας τα 0 και 2 παίρνουμε μία αντιστοιχία 1-σε-1 μεταξύ του συνόλου των λέξεων (της ζητούμενης μορφής) που τελειώνουν σε 0 και του συνόλου των λέξεων (της ζητούμενης μορφής) που τελειώνουν σε 2. Επομένως έχουμε:

$$a_n = c_n$$

και

$$x_n = 2a_n + b_n$$

με

$$a_1 = b_1 = 1$$

και

$$\begin{gathered}
a_{n+1} = a_n + b_n \\
b_{n+1} = a_n + b_n + c_n = 2a_n + b_n = x_n
\end{gathered}$$

Επομένως:

$$\begin{gathered}
b_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + b_{n+1} = (2a_n + b_n) + b_n + b_{n+1} = \\
= b_{n+1} + b_n + b_{n+1} = 2b_{n+1} + b_n
\end{gathered}$$

Άρα έχουμε τη σχέση αναδρομής:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

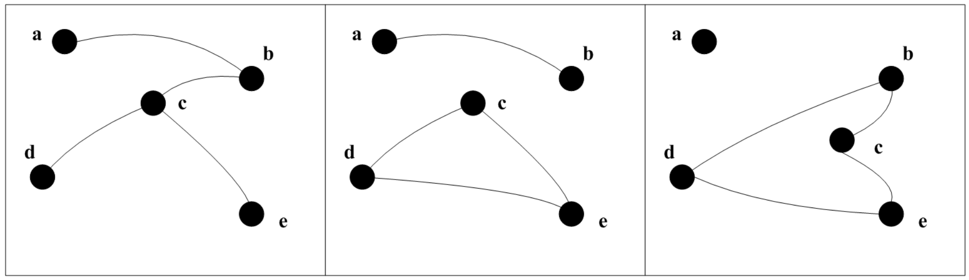
Επομένως:

$$\begin{gathered}
b_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \\
A = B = 1/2 \\
b_n = \tfrac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^n + 1 - \sqrt{2})^n\Big)
\end{gathered}$$

Επομένως ο αριθμός των λέξεων της κατάλληλης μορφής είναι:

$$x_n = b_{n+1} = \tfrac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\Big)$$

4.




ΚΑΛΗ ΚΑΛΗ ΜΗ - ΚΑΛΗ

Προφανώς υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ πιθανοί δρόμοι και άρα $N = |5| = 2^{10}$, γιατί κάθε δρόμος μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

Για $1 \le i \le 5$, ας είναι $c_i$ η συνθήκη ότι το σύστημα των δρόμων απομονώνει τα χωριά $a, b, c, d$ και $e$ αντίστοιχα.

Επομένως η απάντηση είναι:

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5})$

Έχουμε $N(c_1) = 2^6, \quad s_1 = \binom{5}{1}2^6, \quad N(c_1c_2) = 2^3, \quad s_2 = \binom{5}{2}2^3$
$N(c_1c_2c_3) = 2^1, \quad s_3 = \binom{5}{3}2^1, \quad N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0, \quad s_4 = \binom{5}{4}2^0$
$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0, \quad s_5 = \binom{5}{5}2^0$

Επομένως:

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768$