ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2015

1. Μόνο με τα 7 α, τα 8 β και τα 4 δ μπορώ να φτιάξω $\frac{19!}{7!8!4!}$ διατάξεις χωρίς κανέναν περιορισμό.

   Για κάθε μία από τις παραπάνω διατάξεις, θεωρώ ότι τα 5 γ είναι 5 ίδια αντικείμενα που τοποθετούνται σε διαφορετικές υποδοχές που σχηματίζονται από την υπάρχουσα διάταξη.

   Έχουμε συνολικά 19 γράμματα που σχηματίζουν 20 διαφορετικές υποδοχές: μία πριν από κάθε γράμμα και μία στο τέλος. Το γ δε μπορεί να τοποθετηθεί πριν από α γιατί θα σχηματιστεί γα. Οπότε μένουν 13 υποδοχές για να τοποθετηθεί το γ: πριν από κάποιο β, πριν από κάποιο δ ή στο τέλος.

   Οι διαφορετικοί τρόποι να τοποθετηθούν τα 5 γ είναι: $\binom{13+5-1}{5} = \frac{17!}{5!12!}$.

   Άρα συνολικά: $\frac{19!}{7!8!4!} + \frac{17!}{5!12!}$

2. Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτησεις μιας και οι παίκτες και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.

   · Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}+...= e^x - 1$ (κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα μοιράσματος ενός, δύο, τριών ή περισσοτερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες).
   Σημείωση: Επειδή τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}+...$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα δε θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.

   · Άρα η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι: $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$

   · Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$ που είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$

3. Έστω μία ακολουθία μήκους n από Κ και Γ που δίνει ένα πιθανό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε την τελευταία θέση στην ακολουθία και ας τη σημειώσουμε σαν 'ξεχωριστή θέση'. Τότε αν α_n είναι ο αριθμός των ακολουθιών μήκους n, στις οποίες δεν έχουμε δύο διαδοχικά Κ, θα έχουμε την εξής σχέση: Εάν στη θέση n, που ξεχωρίσαμε, έχουμε Γ, τότε θεωρούμε τις θέσεις από 1 εώς $n-1$ σαν μία νέα ακολουθία μήκους $n-1$, στην οποία πάλι δεν πρέπει να έχουμε δύο Κ γειτονικά, ενώ αν στη θέση n έχουμε Κ, τότε επειδή στη θέση $n-1$ πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε Γ, παίρνουμε σαν νέα ακολουθία τις θέσεις από 1 έως $n-2$. Σ' αυτές η ακολουθία μήκους $n-2$ δεν πρέπει να έχει δύο διαδοχικά Κ. Έτσι έχουμε την ομογενή αναδρομική σχέση $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, με αρχικές συνθήκες $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 3$.

   Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

   Έτσι,

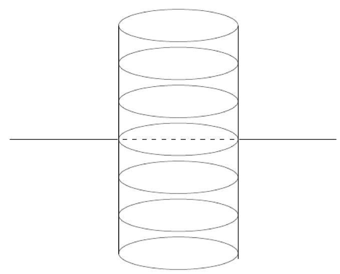
$$\alpha_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

   Άρα,

$$\alpha_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,\ \forall n \in N^*.$$

4. Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις συμμετρίες του κυλίνδρου. Υπάρχουν 2 μεταθέσεις στο G:
   1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^6
   2. Περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^3



Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \dfrac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$ Αφού έχουμε n χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \dfrac{1}{2}((x_1 + ... + x_n)^6 + (x_1^2 + ... + x_n^2)^3)$ Θέτοντας $w(x_1) = ... = w(x_n) = 1$ στην παραπάνω παράσταση, το πλήθος των προτύπων, δηλ. το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών, είναι $\dfrac{1}{2}(n^6 + n^3) = \dfrac{n^3(n^3+1)}{2}$.