ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016

1. Υπάρχουν $(n-1)$ θέσεις μεταξύ των ψηφίων σε μία τέτοια λέξη. Καλούμε θέση - διακόπτη μία θέση στην οποία τα ψηφία αλλάζουν είτε από 0 σε 1 ή από 1 σε 0.

   Για μία λέξη της επιθυμητής μορφής υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

   1. Η λέξη να αρχίζει και να τελειώνει με 1.
      Σε αυτήν τη λέξη πρέπει να υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες (με κάθε δεύτερη θέση - διακόπτη να δίνει ένα 01) και επομένως υπάρχουν $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.
   2. Η λέξη να αρχίζει από 1 και να τελειώνει σε 0.
      Θα υπάρχουν $2m+1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.
   3. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 1.
      Θα υπάρχουν $2m-1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m-1}$ τέτοιες λέξεις.
   4. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 0.
      Θα υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.

   Άρα έχουμε $\binom{n-1}{2m} + \binom{n-1}{2m+1} + \binom{n-1}{2m-1} + \binom{n-1}{2m} = \binom{n}{2m+1} + \binom{n}{2m} = \binom{n+1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.

2. Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.

   Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + ... + \dfrac{z^{25}}{25!} = e^z - 1$.
   Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.
   Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι: $(e^z-1)^3$ και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $\dfrac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z-1)^3$.

   Κάνοντας πράξεις:

$$(e^z-1)^3 = e^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{z^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{z^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} - 1 =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3\cdot 2^r + 3)\frac{z^r}{r!} - 1$$

   Επομένως, ο συντελεστής του $\dfrac{z^{25}}{25!}$ είναι $3^{25} - 3\cdot 2^{25} + 3$.

3. · Υπάρχουν 10^5 διαφορετικά 5-ψήφια νούμερα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.
   · Πόσες μεταθέσεις υπάρχουν στο σύνολο G;
   – Τα ψηφία 0,1,6,8,9 είναι ίδια αν τα διαβάσω 'πάνω κάτω' και 'δεξιά και πάνω' (π.χ., 89166 - 99168)
   · Οπότε είναι $G = \{\pi_1, \pi_2\}$
   π_1: ταυτοτική μετάθεση - αφήνει όλα τα νούμερα όπως είναι - μένουν ίδια 10^5 στοιχεία
   π_2: αφήνει τον αριθμό ίδιο όταν δε μπορεί να διαβαστεί 'πάνω κάτω' ($13765 \to 13765$) και κάνει τον αριθμό ίδιο με τον αντίστοιχο όταν μπορεί να διαβαστεί ανάποδα (π.χ., $89166 \to 99168$). Εδώ μένουν ίδια $(10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^2$ στοιχεία.
   · Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{2}(10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \cdot 5^2)$.

4. Αναλύουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$
   · Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, ..., 110\}$ με πληθικό αριθμό $|S| = N = 110$ και τις συνθήκες c_i,$(1 \leq i \leq 3)$ που αποτελούν το γεγονός ένας αριθμός $k \in S$ να διαιρείται με το 2, 5 και 11 αντίστοιχα
   · Για να μην είναι ένας $k \in S$ σχετικά πρώτος διαιρέσιμος με το 110 πρέπει να μην είναι διαιρέσιμος με κανέναν από τους 2, 5, 11. ;ρα, ο αριθμός των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες c_i,$(1 \leq i \leq 3)$ είναι το $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3)$.
   · c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2 με $N(c_1) = 55$
   · c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5 με $N(c_2) = 22$
   · c_3: ο αριθμός διαιρείται με 11 με $N(c_3) = 10$
   · Επιπλέον είναι: $N(c_1c_2) = 11$, $N(c_1c_3) = 5$, $N(c_2c_3) = 2$, $N(c_1c_2c_3) = 1$
   · Με αντικατάσταση στον αρχικό τύπο προκύπτει $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3) = 110 - 55 - 22 - 10 + 11 + 5 + 2 - 1 = 40$