ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΞΕΤΑΣΗ 2017

1. · Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές, όσοι και οι υπάλληλοι.
   · Το δεύτερο αυτοκίνητο έχει $n+1$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πριν ή μετά από αυτό.
   · Το τρίτο αυτοκίνητο έχει $n+2$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο που πήγε το πρώτο αυτοκίνητο, να πάει πριν ή μετά από αυτό, αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το δεύτερο να παέι πριν ή μετά από αυτό.
   · Το k αυτοκίνητο έχει $n+k-1$ επιλογές: όμοια όπως προηγουμένως.

   Άρα συνολικά (από κανόνα γινομένου) υπάρχουν $n(n+1)...(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικοί τρόποι.

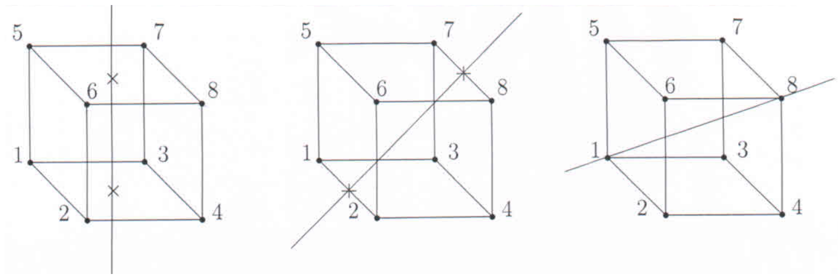
2. Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτησεις μιας και οι παίκτες και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.
   · Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x - 1$ (κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα μοιράσματος ενός, δύο, τριών ή περισσοτερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες).
     Σημείωση: Επειδή τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα δε θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.
   · Άρα η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι: $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$
   · Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$ που είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$

3.
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}] + n =$$
$$= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2n = 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}] + 2n =$$
$$= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + 3n = \ldots = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + in$$

Επομένως αν $n = 2^i$, έχουμε,

$$T(n) = n + n \log n \Longrightarrow T(n) = O(n \log n)$$

4. Το σύνολο G των κατάλληλων περιστροφών του κύβου προκύπτει ως εξής:



κορυφές	πλευρές
1, 2, 3, 4	a
1, 2, 5, 6	b
1, 3, 5, 7	c
3, 4, 7, 8	d
2, 4, 6, 8	e
5, 6, 7, 8	f

Περιγράφουμε τις κατάλληλες περιστροφές του κύβου με τις μεταθέσεις των a, b, c, d, e, f Μαζί με την ταυτοτική $(a), (b), (c), (d), (e), (f)$ υπάρχουν 3 ειδών μεταθέσεις:

1. Περιστροφές γύρω από τον άξονα που περνάει από τα κέντρα 2 απέναντι πλευρών (υπάρχουν 3 επιλογές για το ζευγάρι των πλευρών και επομένως 3 μη-ταυτοτικές περιστροφές). Δύο είναι του τύπου $(bcde)$ και μία του τύπου $(bd)(ce)$
2. Περιστροφές κατά π γύρω από άξονα που περνάει από τα μέσα δύο διαγωνίως αντιθέτων ακμών (υπάρχουν 6 τέτοια ζευγάρια που δίνουν μεταθέσεις του τύπου $(ab)(ce)(df)$).
3. Περιστροφές κατά $2\pi/3$ και $4\pi/3$ γύρω από άξονα δύο διαγωνίως αντιθέτων κορυφών (π.χ. 1 με 8)

   Υπάρχουν 4 τρόποι να διαλέξεις το ζευγάρι των κορυφών και δύο περιστροφές για καθένα που δίνουν 8 συμμετρίες του τύπου $(abc)(def)$

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό για κάθε τύπο συμμετρίας, το σχετικό πολυώνυμο σε c_1, c_2 και c_3 και το συντελεστή $c_1^2 c_2^2 c_3^2$

$\sigma \in G$	s	πολυώνυμο	συντελεστής του $c_1^2 c_2^2 c_3^2$
$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	1	$(c_1 + c_2 + c_3)^6$	$\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$
$(a)(bcde)(f)$	6	$6(c_1 + c_2 + c_3)^2(c_1^4 + c_2^4 + c_3^4)$	0
$(a)(bd)(ce)(f)$	3	$3(c_1 + c_2 + c_3)^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^2$	18
$(ab)(ce)(df)$	6	$6(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^3$	36
$(abc)(def)$	8	$8(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)^2$	0
	24		144

Το αποτέλεσμα επομένως είναι $\frac{144}{24} = 6$ διαφορετικοί χρωματισμοί