ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018

1. Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα. Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος υπάρχει αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k). Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους: υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί. Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω $k-1$ θρανία). Μοιράζω τα $n-2k+1$ ίδια θρανία, που περίσσεψαν σε $k+1$ διαφορετικές υποδοχές. Αυτό γίνεται με
$\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$.
Άρα, συνολικά υπάρχουν $k! \cdot \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ διαφορετικοί τρόποι.

2. Ουσιαστικά, ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα, όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.

   Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^{25}}{25!} = e^z - 1$.
   Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.
   Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι: $(e^z-1)^3$ και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z-1)^3$.
   Κάνοντας πράξεις:
$$(e^z-1)^3 = e^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{z^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{z^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} - 1 =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3\cdot 2^r + 3)\frac{z^r}{r!} - 1$$
   Επομένως, ο συντελεστής του $\frac{z^{25}}{25!}$ είναι $3^{25} - 3\cdot 2^{25} + 3$.

3. Θεωρούμε το σύνολο D των 8 κορυφών του κύβου, το σύνολο $R = x, y$ των 2 χρωμάτων με $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Αν G είναι η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου, θα έχουμε $|G| = 24$ μεταθέσεις, που είναι οι εξής:

- Η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8.
- 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180°γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90°γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_4^2.
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.
- 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120°γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με κυκλική αναπαράσταση $x_1^2x_3^2$.

Συνεπώς, ο δείκτης κύκλων P_G της ομάδας G είναι:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών:

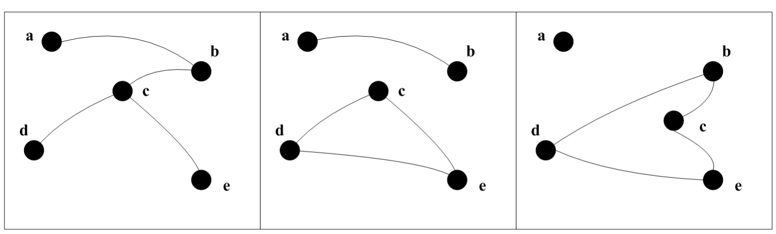
$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$$

Θέτουμε $x = y = 1$ και υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών

$$\frac{1}{24}(2^8 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 23$$

, που είναι ο ζητούμενος αριθμός.

4. Προφανώς, υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ πιθανοί δρόμοι και άρα, $N = |S| = 2^{10}$, γιατί κάθε δρόμος μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.



ΚΑΛΗ ΚΑΛΗ ΜΗ - ΚΑΛΗ

Για $1 \leq i \leq 5$, ας είναι c_i η συνθήκη ότι το σύστημα των δρόμων απομονώνει τα χωριά a, b, c, d και e αντίστοιχα.

Επομένως, η απάντηση είναι: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5})$.

Έχουμε: $N(c_1) = 2^6, \quad s_1 = \binom{5}{1}2^6, \quad N(c_1c_2) = 2^3, \quad s_2 = \binom{5}{2}2^3$
$N(c_1c_2c_3) = 2^1, \quad s_3 = \binom{5}{3}2^1, \quad N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0, \quad s_4 = \binom{5}{4}2^0$
$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0, \quad s_5 = \binom{5}{5}2^0$.

Επομένως: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768.$