ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι
ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

1. Αφού θέλουμε 'τουλάχιστον 9 μπάλες σε κάθε κουτί' δεσμεύουμε $9n$ μπάλες. Συνεπώς, μένουν $r - 9n$ ίδιες μπάλες τις οποίες μπορούμε να τοποθετήσουμε στα n διαφορετικά κουτιά με όλους τους δυνατούς τρόπους $\Rightarrow \frac{(r-9n+n-1)!}{(n-1)!(r-9n)!} = \binom{r-9n+n-1}{r-9n}$

2. Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.

   Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι: $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^{25}}{25!} = e^z - 1$.
   Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.

   Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι: $(e^z - 1)^3$ και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z - 1)^3$.

   Κάνοντας πράξεις:

$$(e^z - 1)^3 = e^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{z^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{z^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3 \cdot 2^r + 3)\frac{z^r}{r!} - 1$$

   Επομένως, ο συντελεστής του $\frac{z^{25}}{25!}$ είναι $3^{25} - 3 \cdot 2^{25} + 3$.

3. Έστω $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{16}\}$ το σύνολο των 16 τετραγώνων της 4×4 σκακιέρας και $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ η ομάδα μεταθέσεων επί του D με π_1 την ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^{16}, π_2 τη μετάθεση, που αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη περιστροφή της σκακιέρας κατά 90^o γύρω από άξονα, κάθετο στο κέντρο της, με κυκλική αναπαράσταση x_4^4, και π_3, π_4 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές κατά 180^o και 270^o, αντίστοιχα, γύρω από τον ίδιο άξονα, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_2^8, x_4^4, αντίστοιχα.

   Τότε ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{4}(x_1^{16} + x_2^8 + 2x_4^4)$$

   Έστω $R = \{x, y\}$ το σύνολο των 2 χρωμάτων, μαύρο και άσπρο. Έστω επίσης $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Τότε ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών γίνεται,

$$\frac{1}{4}[(x+y)^{16} + (x^2+y^2)^8 + 2(x^4+y^4)^4]$$

   Θέτοντας $x = y = 1$ παίρνουμε για το ζητούμενο αριθμό σχημάτων,

$$\frac{1}{4}(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4) = 16456$$