ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

1. Δίνεται ότι: '*τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους* '. Επομένως, διανομές των θέσεων που προκύπτουν η μία από την άλλη με ανταλλαγή θέσεων συνέδρων μεταξύ τους, ή προσώπων συνέδρων, χωρίς αλλαγή του αριθμού των συνέδρων της κάθε ομάδας, δε μετράνε ως διαφορετικές. Έτσι, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα τοποθέτησης μη διακεκριμένων (δηλ., ίδιων) αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές (τις διαφορετικές ομαδες).

   Αν μία ομάδα έχει $n+1$ θέσεις, τότε οι δύο άλλες δε μπορούν ποτέ να έχουν πλειοψηφία. Άρα για να απαντήσουμε στην ερώτηση πρέπει:

   1. να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις σε 3 ομάδες χωρίς περιορισμό, και
      - Τρόποι τοποθέτησης $2n+1$ ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1}$
   2. να αφαιρέσουμε από αυτούς εκείνους τους τρόπους που δίνουν τουλάχιστον $n+1$ θέσεις σε μία μόνο ομάδα
      - Δίνουμε $n+1$ θέσεις σε μία από τις ομάδες οπότε μένουν για διανομή $2n+1-n-1 = n$ θέσεις
      - Τρόποι τοποθέτησης n ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n}$
      - Συνολικά, αφού υπάρχουν 3 ομάδες: $3 \cdot \binom{n+2}{n}$

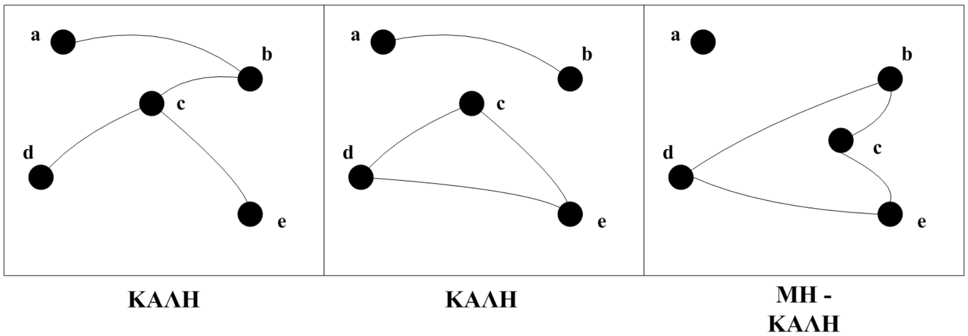
   Οπότε οι ζητούμενοι τρόποι είναι: $\binom{2n+3}{2} - 3 \cdot \binom{n+2}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

2. Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτησεις μιας και οι παίκτες και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.

   – Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x - 1$ (κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα μοιράσματος ενός, δύο, τριών ή περισσοτερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες).
   Σημείωση: Επειδή τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα δε θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.

- Άρα η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι: $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$
- Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$ που είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$

3.



Προφανώς υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ πιθανοί δρόμοι και άρα $N = |5| = 2^{10}$, γιατί κάθε δρόμος μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

Για $1 \leq i \leq 5$, ας είναι c_i η συνθήκη ότι το σύστημα των δρόμων απομονώνει τα χωριά a, b, c, d και e αντίστοιχα.

Επομένως η απάντηση είναι:

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5})$

Έχουμε $N(c_1) = 2^6, \quad s_1 = \binom{5}{1}2^6, \quad N(c_1c_2) = 2^3, \quad s_2 = \binom{5}{2}2^3$
$N(c_1c_2c_3) = 2^1, \quad s_3 = \binom{5}{3}2^1, \quad N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0, \quad s_4 = \binom{5}{4}2^0$
$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0, \quad s_5 = \binom{5}{5}2^0$

Επομένως:

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768$