ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013

1. Επειδή $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, είναι $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$

   $\binom{2n}{n}$ σημαίνει να διαλέξουμε n από $2n$ αντικείμενα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

   Χωρίζουμε τα $2n$ αντικείμενα σε 2 ομάδες ώστε κάθε μία να έχει n αντικείμενα.

   Για $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$, διαλέγουμε i αντικείμενα από την πρώτη ομάδα με $\binom{n}{i}$ τρόπους και $n - i$ αντικείμενα από τη δεύτερη ομάδα με $\binom{n}{n-i}$ τρόπους.

   Για $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$, υπάρχουν $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ τρόποι επιλογής.

   Τα ενδεχόμενα για διαφορετικές τιμές του i είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, οπότε με κανόνα αθροίσματος έχουμε: $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$

2. $A(x) = \dfrac{1+x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3} + \dfrac{x}{1+x-x^2-x^3} = 1 + \dfrac{x}{1+x-x^2(1+x)} = 1 + \dfrac{x}{(1+x)(1-x^2)} = 1 + \dfrac{x}{(1+x)^2(1-x)}$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

$\dfrac{x}{(1+x)^2(1-x)} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1+x} + \dfrac{C}{(1+x)^2} \Longleftrightarrow$

$$x = A(1+x)^2 + B(1-x)(1+x) + C(1-x) \tag{1}$$

· Για $x = 1 \overset{(1)}{\overbrace{\Longrightarrow}} 1 = A \cdot 2^2 \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$. Αντικαθιστούμε στην (1):

$$x - \frac{1}{4}(1+x)^2 = B(1-x)(1+x) + C(1-x) \tag{2}$$

· Για $x = -1 \overset{(2)}{\overbrace{\Longrightarrow}} -1 = C \cdot 2 \Longrightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$. Αντικαθιστούμε στην (2): $x - \frac{1}{4}(1+x)^2 + \frac{1}{2}(1-x) = B(1-x^2)$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη $\Longrightarrow$

$$1 - \frac{2}{4}(1+x) - \frac{1}{2} = -2Bx \tag{3}$$

· Για $x = 1 \overset{(3)}{\overbrace{\Longrightarrow}} 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} = -2B \Longrightarrow -\frac{1}{2} = -2B \Longrightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$

· Έχουμε: $A(x) = 1 + \frac{1}{4}(1-x)^{-1} + \frac{1}{4}(1+x)^{-1} - \frac{1}{2}(1+x)^{-2} =$

$1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k =$

$1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k =$

$1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}(-1)^k(k+1)\right]x^k = 1 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^6 + \dots$

3. Για $n \geq 0$, έστω a_n ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n, που δεν περιέχουν διαδοχικά μηδενικά. Ας είναι $a_n^{(0)}$ ο αριθμός αυτών των ακολουθιών που τελειώνουν σε μηδέν και $a_n^{(1)}$ αυτών που τελειώνουν σε ένα. Προφανώς $a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}$. Επίσης ισχύει η αναδρομική σχέση,

$$a_n = 2a_{n-1}^{(1)} + 1a_{n-1}^{(0)}$$

αφού από μία δυαδική ακολουθία $n-1$ ψηφίων που τελειώνει σε ένα, μπορούμε να πάρουμε δύο αποδεκτές ακολουθίες ν ψηφίων προσθέτοντας στο τέλος έναν άσσο ή ένα μηδενικό, ενώ από μία δυαδική ακολουθία $n-1$ ψηφίων, που τελειώνει σε μηδέν, μπορούμε να πάρουμε μόνο μία αποδεκτή ακολουθία n ψηφίων προσθέτοντας έναν άσσο στο τέλος της. Συνεπώς θα έχουμε,

$$a_n = a_{n-1}^{(1)} + [a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1}^{(0)}] =$$

$$= a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Άρα η σχέση αναδρομής που επιλύει το πρόβλημα είναι η $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με $n \geq 2$ και $a_0 = 1, a_1 = 2$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική δευτέρου βαθμού με χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - x - 1 = 0$.

Έχουμε ($x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Έτσι η αναδρομική σχέση έχει γενική λύση της μορφής,

$$a_n = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Άρα από αρχικές συνθήκες $a_0 = 1$ και $a_1 = 2$ έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

Επομένως ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n που δεν περιέχουν συνεχόμενα μηδενικά είναι,

$$a_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{10})^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

4. Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις συμμετρίες του κυλίνδρου. Υπάρχουν 2 μεταθέσεις στο G:

    1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^6
    2. Περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^3

    Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$

    Αφού έχουμε n χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{2}((x_1 + ... + x_n)^6 + (x_1^2 + ... + x_n^2)^3)$

    Θέτοντας $w(x_1) = ... = w(x_n) = 1$ στην παραπάνω παράσταση, το πλήθος των προτύπων, δηλ. το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών, είναι $\frac{1}{2}(n^6 + n^3) = \frac{n^3(n^3+1)}{2}$.