

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**  
**ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016**

1. (α') Υπάρχουν  $\binom{5}{3}$  τρόποι για να επιλέξουμε 3 άνδρες από τους 5 άνδρες και  $\binom{7}{2}$  τρόποι για να επιλέξουμε 2 γυναίκες από τις 7 γυναίκες.  
Άρα υπάρχουν συνολικά  $\binom{5}{3}\binom{7}{2} = 210$  τρόποι για να επιλέξουμε 3 άνδρες και 2 γυναίκες.

(β') (πλήθος ομάδων με τουλάχιστον έναν άνδρα) = (συνολικός αριθμός πενταμελών ομάδων) - (πλήθος πενταμελών ομάδων που ΔΕΝ περιέχουν κανέναν άνδρα) =  $\binom{12}{5} - \binom{7}{5} = 771$

2. Ας είναι:

$a_n$  - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε 0.

$b_n$  - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε 1.

$c_n$  - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε 2.

$$x_n = a_n + b_n + c_n$$

Αλλάζοντας τα 0 και 2 παίρνουμε μία αντιστοιχία 1-σε-1 μεταξύ του συνόλου των λέξεων (της ζητούμενης μορφής) που τελειώνουν σε 0 και του συνόλου των λέξεων (της ζητούμενης μορφής) που τελειώνουν σε 2. Επομένως έχουμε:

$$a_n = c_n$$

και

$$x_n = 2a_n + b_n$$

με

$$a_1 = b_1 = 1$$

και

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n + c_n = 2a_n + b_n = x_n \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + b_{n+1} = (2a_n + b_n) + b_n + b_{n+1} = \\ &= b_{n+1} + b_n + b_{n+1} = 2b_{n+1} + b_n \end{aligned}$$

Άρα έχουμε τη σχέση αναδρομής:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Επομένως:

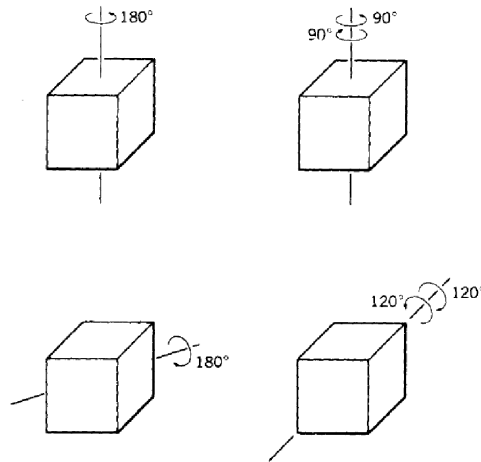
$$b_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n \quad A = B = 1/2 \quad b_n = \frac{1}{2} \left( (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right)$$

Επομένως ο αριθμός των λέξεων της κατάλληλης μορφής είναι:

$$x_n = b_{n+1} = \frac{1}{2} \left( (1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right)$$

3. Έστω  $G$  το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στο  $G$  που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 5 κατηγορίες:

1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση:  $x_1^8$
2. 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές  $180^\circ$  γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση:  $3x_2^4$
3. 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές  $90^\circ$  γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση:  $6x_4^2$
4. 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές  $180^\circ$  γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση:  $6x_2^4$
5. 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές  $120^\circ$  γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές. Κυκλική αναπαράσταση:  $8x_1^2 x_3^2$



Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων  $G$  είναι:  $P_G = \frac{1}{24} (x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2)$ .

Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι:

$$P_G = \frac{1}{24} ((x + y)^8 + 9(x^2 + y^2)^4 + 6(x^4 + y^4)^2 + 8(x + y)^2 (x^3 + y^3)^2).$$

Θέτοντας  $w(x) = w(y) = 1$  στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 23 που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των 8 κορυφών του κύβου με 2 χρώματα.