ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2015

1.
- Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές, όσοι και οι υπάλληλοι.
- Το δεύτερο αυτοκίνητο έχει $n+1$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πριν ή μετά από αυτό.
- Το τρίτο αυτοκίνητο έχει $n+2$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο που πήγε το πρώτο αυτοκίνητο, να πάει πριν ή μετά από αυτό, αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το δεύτερο να παέι πριν ή μετά από αυτό.
- Το k αυτοκίνητο έχει $n+k-1$ επιλογές: όμοια όπως προηγουμένως.

Άρα συνολικά (από κανόνα γινομένου) υπάρχουν $n(n+1)...(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικοί τρόποι.

2.
- Έστω a_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα.
- Για κάθε είδος κερμάτων, μπορούμε να διαλέξουμε κανένα, 1,2,.... Αυτό κωδικοποιείται στη ΓΣ ως $1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$.
- Αφού έχουμε 3 διαφορετικά είδη κερμάτων, η ΓΣ για την a_k είναι $(1-x)^{-3}$.
- Το ζητούμενο δίνεται από το a_{10} που είναι ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ.
- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι: $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.

3. Έστω n θετικός ακέραιος. Για $r \geq 0$, έστω $a_{n,r}$ ο αριθμός των τρόπων επιλογής των r αντικειμένων με επαναλήψεις από n διαφορετικά αντικείμενα. Για $n \geq 0$, ας είναι $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ το σύνολο αυτών των αντικειμένων και ας θεωρήσουμε το αντικείμενο b_1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

   - Το αντικείμενο b_1 δεν επιλέγεται ποτέ. Τότε τα r αντικείμενα επιλέγονται από το σύνολο $\{b_2, ..., b_n\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με $a_{n-1,r}$ τρόπους.
   - Το αντικείμενο b_1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Τότε πρέπει να επιλέξουμε $r-1$ αντικείμενα από το σύνολο $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ έτσι ώστε να είναι δυνατή η επανεπιλογή του b_1. Υπάρχουν $a_{n,r-1}$ τρόποι για να επιτευχθεί αυτό.

   Αφού οι παραπάνω δύο τρόποι επιλογής των r αντικειμένων είναι αμοιβαία αποκλειόμενοι και καλύπτουν όλες τις δυνατές επιλογές, έχουμε:

$$a_{n,r} = a_{n-1,r} + a_{n,r-1}$$

   Έστω

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n,r} x^r$$

   η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_{n,0}, a_{n,1}, ...$ Από την προηγούμενη σχέση για $n \geq 1, r \geq 1$ παίρνουμε:

$$a_{n,r}x^r = a_{n-1,r}x^r + a_{n,r-1}x^r \implies \sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r}x^r = \sum_{r=1}^{\infty} a_{n-1,r}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r-1}x^r$$

   Λαμβάνοντας υπόψη τις προφανείς αρχικές συνθήκες $a_{n,0} = 1$ για $n \geq 0$ και $a_{0,r} = 0$ για $r > 0$ παίρνουμε:

$$f_n - a_{n,0} = f_{n-1} - a_{n-1,0} + x \sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r-1}x^{r-1} \implies$$

$$f_n - 1 = f_{n-1} - 1 + xf_n \implies f_n - xf_n = f_{n-1} \implies$$

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{1-x} \implies f_n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$$

   Αφού ο $a_{n,r}$ είναι ο συντελεστής του x_r εις το ανάπτυγμα της f_n θα έχουμε $a_{n,r} = \binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}^1$.

4. Ο ζητούμενος αριθμός συμπίπτει με τον αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του τετραέδρου, πεδίο τιμών το σύνολο των δύο χρωμάτων και ομάδα μεταθέσεων G το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων που ανιστοιχούν σε περιστροφές του τετραέδρου.Αυτές είναι:

   - Η ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^4.
   - 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές $120°$γύρω από τους άξονες που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψεως, με κυκλική αναπαράσταση x_1x_3.
   - 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές $180°$γύρω από τους άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^2.

   Έτσι ο δείκτης κύκλων είναι

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$$

   και ο αριθμός εύρεσης χρωματισμών είναι

$$\frac{1}{12}[(y+z)^4 + 8(y+z)(y^3+z^3) + 3(y^2+z^2)^2]$$

   Για $y = z = 1$ παίρνουμε τον ζητούμενο αριθμό

$$\frac{1}{12}[2^4 + 8 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2] = 5$$