ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2015

1. Ξεκινούμε τοποθετώντας πρώτα στη δοσμένη γραμμή τα "-"κατά τρόπο αυθαίρετο με μόνον τον περιορισμό ότι δεν πρέπει να κατέχουν γειτονικές θέσεις. Κατά την τοποθέτηση των "+"ο περιορισμός αυτός επιβάλλει την τοποθέτηση ενός τουλάχιστον "+"μεταξύ οποιωνδήποτε δύο "-"που έχουν ήδη τοποθετηθεί. Έτσι τα πρώτα $q-1$ "+"που τοποθετούμε, τοποθετούνται σε προκαθορισμένες θέσεις (καθένα τους μεταξύ δύο "-").
   Περισσεύουν τώρα $p-q+1$ "+"τα οποία πρέπει να τοποθετηθούν στη γραμμή με όλους τους δυνατούς τρόπους. Η τοποθέτηση τους αντιστοιχεί στην τοποθέτηση $p-q+1$ όμοιων σφαιρών (των "+"που περισσεύουν) σε $q+1$ διακεκριμένες υποδοχές (των θέσεων μεταξύ δύο διαδοχικών "-"στη γραμμή και των ακριανών θέσεων της γραμμής). Ο αριθμός των τρόπων να γίνει αυτή η τοποθέτηση είναι:
   $$\frac{((p-q+1)+(q+1)-1)!}{(p-q+1)!((q+1)-1)!} = \binom{p+1}{q}$$

2. Κωδικοποιούμε στον εκθέτη την αξία των κερμάτων σε λεπτά. Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
   Για τα 20-λεπτα: $z^{20}+z^{40}+z^{60}+...$
   Για τα 50-λεπτα: $z^{50}+z^{100}+z^{150}+...$
   Για τα 1-ευρα: $z^{100}+z^{200}+z^{300}+...$
   Για τα 2-ευρα: $z^{200}+z^{400}+z^{600}+...$
   Δηλαδή τελικά:
   $$(z^{20}+z^{40}+z^{60}+...)(z^{50}+z^{100}+z^{150}+...)(z^{100}+z^{200}+z^{300}+...)(z^{200}+z^{400}+z^{600}+...)$$
   Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από τον συντελεστή του z^{100n} στην παραπάνω παράσταση.

3. Θεωρούμε το σύνολο D των 8 κορυφών του κύβου, το σύνολο $R = x, y$ των 2 χρωμάτων με $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Αν G είναι η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου, θα έχουμε $|G| = 24$ μεταθέσεις, που είναι οι εξής:

   · Η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8.

   · 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές $180°$γύρω από άξονες που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.

   · 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές $90°$γύρω από άξονες που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_4^2.

   · 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές γύρω από άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.

   · 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές $120°$γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές, με κυκλική αναπαράσταση $x_1^2 x_3^2$.

   Συνεπώς, ο δείκτης κύκλων P_G της ομάδας G είναι:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

   και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών:

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$$

   Θέτουμε $x = y = 1$ και υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών

$$\frac{1}{24}(2^8 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 23$$

   που είναι ο ζητούμενος αριθμός.

4. Είναι $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Έστω $S = \{1, 2, 3, ..., 70\}$ με $N = |S| = 70$ και $c_i, (1 \leq i \leq 3)$ το γεγονός ένας αριθμός $k \in S$ να διαιρείται με το 2, το 5 ή το 7 αντίστοιχα. Για να είναι ένας $k \in S$ σχετικά πρώτος με το 70 πρέπει να μην είναι διαιρέσιμος με κανένα από τους 2,5,7, οπότε ψάχνουμε το:

$$N(\bar{c_1}\bar{c_2}\bar{c_3}) =$$
$$= N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)] - N(c_1c_2c_3) =$$
$$= 70 - (35 + 14 + 10) + (7 + 5 + 2) - 1 = 24$$