ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

1. Διαφορετικοί τρόποι για να μεταδώσω μόνο τα 12 διαφορετικά σύμβολα: 12!

   Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, σχηματίζονται 11 θέσεις μεταξύ των 12 συμβόλων, σε κάθε μία από τις οποίες πρέπει να βάλουμε τουλάχιστον 3 κενά:
   άρα χρησιμοποιούμε άλλους 33 από τους 45 κενούς χαρακτήρες. Μένουν 12 κενά.

   12 κενά, που μένουν $\Leftrightarrow$ 12 ίδια αντικείμενα, που θέλουμε να τοποθετήσουμε σε 11 διαφορετικά κουτιά $\Leftrightarrow$ τις θέσεις, που είπαμε πριν. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{11+12-1}{12} = \binom{22}{12}$ διαφορετικούς τρόπους.

   Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα με $12! \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \end{pmatrix} = 3.097 \times 10^{14}$ διαφορετικούς τρόπους.

2. $A(x) = 2^0+5^0+(2^1+5^1)x+(2^2+5^2)x^2+\ldots = (2^0+2x+2^2x^2+\ldots)+(5^0+5x+2^5x^2+\ldots) =$

   $[(2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + \ldots] + [(5x)^0 + (5x)^1 + (5x)^2 + \ldots] = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-5x} = \frac{1-5x+1-2x}{1-7x+10x^2} =$

   $\frac{2-7x}{1-7x+10x^2} \cdot \frac{2+3x-6x^2}{1+2x} = -3x+3-\frac{1}{2x+1} = = 3-3x-(1+2x)^{-1} = 3-3x-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}2^kx^k =$

   $= 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k x^k = 2 - x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \ldots.$

3. Θεωρούμε το σύνολο D των 8 κορυφών του κύβου, το σύνολο $R = x, y$ των 2 χρωμάτων με $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Αν G είναι η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου, θα έχουμε $|G| = 24$ μεταθέσεις, που είναι οι εξής:

   · Η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8.

· 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180°γύρω από άξονες που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.

· 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90°γύρω από άξονες που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_4^2.

· 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές γύρω από άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.

· 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120°γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές, με κυκλική αναπαράσταση $x_1^2 x_3^2$.

Συνεπώς, ο δείκτης κύκλων P_G της ομάδας G είναι:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών:

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$$

Θέτουμε $x = y = 1$ και υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών

$$\frac{1}{24}(2^8 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 23$$

που είναι ο ζητούμενος αριθμός.