ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

1. Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα. Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος υπάρχει αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k). Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους: υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί. Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω $k-1$ θρανία). Μοιράζω τα $n-2k+1$ ίδια θρανία που περίσσεψαν σε $k+1$ διαφορετικές υποδοχές. Αυτό γίνεται με
   $\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ Άρα συνολικά υπάρχουν $k! \cdot \binom{n-k+1}{n-2k+1}$

   διαφορετικοί τρόποι.

2. Υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε μαρκαδόρους στο 1ο άτομο σύμφωνα με τους περιορισμούς αφού αυτό καθορίζει μοναδικά αυτούς που θα πάρει το 2ο άτομο.
   Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
   Για τους μαύρους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + ... + z^5$
   Για τους πράσινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + ... + z^9$
   Για τους κόκκινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3$
   Δηλ. τελικά: $(z + z^2 + z^3 + ... + z^5)(z + z^2 + z^3 + ... + z^9)(z + z^2 + z^3)$
   Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{10} στην παραπάνω παράσταση που είναι 15.

3. Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων $0, 1, 2, ..., 9$ $|S| = N = 10!$
   c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
   c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$
   Αυτό που ζητάμε είναι το: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 10! - 2{\cdot}9! - 2{\cdot}9! + 4{\cdot}8! = 2338560$