ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

1. Υπάρχουν $(n-1)$ θέσεις μεταξύ των ψηφίων σε μία τέτοια λέξη. Καλούμε θέση - διακόπτη μία θέση στην οποία τα ψηφία αλλάζουν είτε από 0 σε 1 ή από 1 σε 0.

   Για μία λέξη της επιθυμητής μορφής υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

   1. Η λέξη να αρχίζει και να τελειώνει με 1.
      Σε αυτήν τη λέξη πρέπει να υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες (με κάθε δεύτερη θέση - διακόπτη να δίνει ένα 01) και επομένως υπάρχουν $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.
   2. Η λέξη να αρχίζει από 1 και να τελειώνει σε 0.
      Θα υπάρχουν $2m+1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.
   3. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 1.
      Θα υπάρχουν $2m-1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m-1}$ τέτοιες λέξεις.
   4. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 0.
      Θα υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.

   Άρα έχουμε $\binom{n-1}{2m}+\binom{n-1}{2m+1}+\binom{n-1}{2m-1}+\binom{n-1}{2m}=\binom{n}{2m+1}+\binom{n}{2m}=\binom{n+1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.

2. Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.
   Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι:
   $z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+...+\dfrac{z^{25}}{25!}=e^z-1.$
   Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.
   Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι:
   $(e^z-1)^3$
   και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του
   $\dfrac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z-1)^3$.
   Κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$(e^z-1)^3=e^{3z}-3e^{2z}+3e^z-1=$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}3^r\frac{z^r}{r!}-3\sum_{r=0}^{\infty}2^r\frac{z^r}{r!}+3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{r!}-1=$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}(3^r-3\cdot 2^r+3)\frac{z^r}{r!}-1$$

   Επομένως, ο συντελεστής του $\dfrac{z^{25}}{25!}$ είναι: $3^{25}-3\cdot 2^{25}+3$.

3. Θέτουμε: $b_n = \log a_n$ με $b_0 = \log 1 = 0$ και επίσης, $\log a_n = \log 10 + \log a_{n-1}^2 \Rightarrow \log a_n = 2\log a_{n-1} + \log 10 \Rightarrow b_n = 2b_{n-1} + 1$. Η τελευταία έχει λύση $b_n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in N$, άρα $a_n = 10^{b_n} \Rightarrow a_n = 10^{2^{n+1}-1} \quad \forall n \in N$.

4. Η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

   · $D = \{a, b, c, d\}$, οι πλευρές

   · $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$

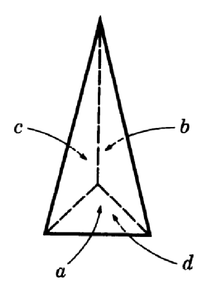
   · Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.

   · Για την π_1 είναι: x_1^4

   · Για την π_2 είναι: $x_1^1 x_3^1$

   · Για την π_3 είναι: $x_1^1 x_3^1$

   · Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^1 x_3^1 + x_1^1 x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^1 x_3^1}{3}$



   · Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:

   · Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} = x^4 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3$

   · Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

   Εναλλακτικά: Η βάση της πυραμίδας μπορεί να χρωματιστεί με δύο τρόπους (αφού 2 είναι τα διαθέσιμα χρώματα). Για κάθε έναν από αυτούς τους χρωματισμούς, οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να λάβουν οι υπόλοιπες πλευρές προκύπτουν ως εξής:

   · $D = \{a, b, c\}$, οι πλευρές (εκτός της βάσης)

   · $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$

   · Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.

   · Για την π_1 είναι: x_1^3

   · Για την π_2 είναι: x_3^1

   · Για την π_3 είναι: x_3^1

   · Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_3^1 + x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^3 + 2x_3^1}{3}$

   · Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:

· Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^3 + 2(x^3+y^3)}{3}$

· Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $\frac{2^3+2\cdot 2}{3} = 4$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί για κάθε διαφορετικό χρωματισμό της βάσης. Επομένως, συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 4 = 8$ διαφορετικοί χρωματισμοί.