ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

1. **Να λυθεί η α_n= 10$a^2{}_{n-1}$, για n ≥ 1, α_0=1.**

   Θέτουμε: b_n = $log\ a_n$, οπότε $b_0 =\ log\ a_0 = log\ 1 = 0$
   Επίσης ισχύει ότι $log\ a_n$ = Log 10 + $log\ a^2{}_{n-1}$ => $log\ \alpha_n = 2\ \ log\ a_{n-1}$ + log 10 => b_n= 2 b_{n-1} + 1 **(1)**
   Η **(1)** έχει λύση την b_n = 2^{n+1} – 1, ∀ n ∈ N, άρα:
   α_n = 10^{b_n} => α_n = $10^{2^{n+1}-1}$, ∀ n ∈ N.

2. **Να υπολογίσετε πόσοι από τους ακέραιους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 10000000000 περιέχουν το ψηφίο 1 και πόσοι δεν το περιέχουν.**

   Μεταξύ των αριθμών 0 και 999999999 υπάρχουν 9^{10} ακέραιοι που δεν περιέχουν το ψηφίο 1. Αυτό συμβαίνει διότι το πλήθος των αριθμών ισούται με τον αριθμό των διατάξεων 9 στοιχείων (0,2,3,4,5,6,7,8,9) σε 10 θέσεις με επανάληψη. Στην περίπτωση που μελετάμε, απουσιάζει ένας αριθμός που δεν περιέχει το 1 (το 0) και προστίθεται ένας αριθμός που το περιέχει (το 10000000000). Άρα μεταξύ του 1 και του 10000000000, υπάρχουν 9^{10} – 1 ακέραιοι που δεν περιέχουν το ψηφίο 1 και 10^{10} - 9^{10} + 1 ακέραιοι που περιέχουν το ψηφίο 1.

3. **Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές, όταν πρέπει να πάρουμε περιττό αριθμό από άσπρες και άρτιο αριθμό από κόκκινες μπάλες;**

   Για τις άσπρες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
   z + z^3 + z^5+ …. = z (1 + z^2+ z^4 + ….)
   Για τις κόκκινες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
   1 + z^2+ z^4 + ….
   Για τις πράσινες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
   1 + z + z^2+ z^3 + …. = $\frac{1}{1-z}$
   Το πλήθος των τρόπων που ζητάω, δίνεται από το συντελεστή του z^rστο:
   z $(1\ +\ z^2\ +\ z^4\ +\ \dots)^2\frac{1}{1-z}$ = $\frac{z}{1-z}$ $(\frac{1}{1-z^2})^2$